 Министерство образования Красноярского края

Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное

учреждение «Красноярский колледж радиоэлектроники и информационных технологий»



**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

ОП 01. Дискретная математика

интеллектуальных интегрированных систем

По дисциплине \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Курс \_\_2\_\_

2

Для специальности (код и наименование)

09.02.08 Интеллектуальные интегрированные системы

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Красноярск, 2025

Методические рекомендации составлены:

Преподавателем высшей категории КГБПОУ СПО «ККРИТ» Е.В. Харитоновой

Преподавателем высшей категории КГБПОУ СПО «ККРИТ» Л.В. Шайхутдиновой

Преподавателем первой категории КГБПОУ СПО «ККРИТ» К.В. Савельевой

РАССМОТРЕНО

на заседании цикловой комиссии преподавателей

профессионального цикла информационно-технического профиля

Протокол №\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2025 г.

Председатель ЦК \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е.В. Харитонова

Ответственный редактор: зам. директора по учебной работе М.А. Полютова

Одобрено Методическим советом КГБПОУ СПО «ККРИТ»

протокол № \_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 2025 г.

Председатель методического совета

Зам. директора по УР М.А. Полютова

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических занятий по предмету ОП.01. Дискретная математика разработаны для студентов второго курса специальности 09.02.08 Интеллектуальные интегрированные системы и преподавателям по организации практических занятий по изучаемой дисциплине, в соответствии с требованиями федерального государственного стандарта среднего профессионального образования.

Содержанием практических работ является решение различных примеров и задач по дискретной математике. Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практической работы используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая практическая работа оформляется в тетради для практических работ. В оформление работы входит запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

Выполнение практических работ по дисциплине ОП. 01 Дискретная направлено на формирование общих компетенций:

ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской

Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК 09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

## Перечень практических занятий

**Практическая занятие №1** Множества и основные операции над ними

**Практическое занятие № 2** Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна **Практическая занятие №** 3 Исследование свойств бинарных отношений. Теория отображений и алгебра подстановок.

**Практическая занятие №4** Формулы логики. Построение таблиц истинности

**Практическая занятие №5** Представление булевой функции в виде минимальной ДНФ и КНФ **Практическая занятие №6** Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции

**Практическое занятие № 7** Методы криптографической защиты информации

**Практическое занятие № 8** Построение графов по исходным данным

**Практическая занятие №9** Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ**

**ЗАНЯТИЙ**

## Практическое занятие №1

Множества и основные операции над ними

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться выполнять операции над множествами и представлять множества кругами Эйлера.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

# КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, образует **множество**. Над множествами можно совершать следующие операции:

1. **Объединение (А****В)** – включает элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А и В.
2. **Пересечение (A****B)** – включает элементы, которые одновременно принадлежат А и В.
3. **Разность (А\В)** – включает элементы, которые принадлежат А и не принадлежат В.
4. **Дополнение (А’)** – включает элементы, которые не принадлежат множеству А (т.е.

дополняют его до универсального U).

1. **Декартово произведение (АхВ)** – включает упорядоченные пары (а, b), в которых первый

элемент а А, второй элемент b  В.

*Пример 1.*На множестве U букв русского алфавита заданы множества:

А = {л, о, г, и, к, а}

В = {у, р, о, к}

С = {г, р, у, п, п, а}

Найти следующие множества: А) (AB)C; Б) (АВ)С; В) U\( АВC) *Решение*

## А) (AB)C

Сначала определим пересечение множеств А и В (AB), которое включает буквы, принадлежащие одновременно множествам А и В.

AB = {o, к}

Объединим получившиеся пересечение с множеством С. Объединение будет содержать элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств: (AB)C = {о, к, г, р, у, п, п, а}

## Б) (АВ)С

Объединение множеств АВ = {л, о, г, и, к, а, у, р}

(АВ)С = {г, а, у, р}

## В) U\(АВC)

Объединение множеств АВC = {л, о, г, и, к, а, у, р, п}

Универсальным множеством является множество букв русского алфавита, поэтому в разности

U\(АВC) будут содержаться буквы алфавиты, не входящие в объединение (АВC)

U\(АВC) = {б, в, д, е, ё, ж, з, и, й, м, н, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я}

*Пример 2*. Даны отрезки А = [-5, 1], В = [0, 2], С = [2, 7].

Найти следующие множества: А) (AB); Б) (АВ)С; В) (СВ)\(АВ)

*Решение*

Нарисуем числовую ось и отметим на ней точки отрезков:



В



-

5



0



2



7



1



А



С

А) (AB) = [-5, 2]

Б) (АВ)С = [0, 1] С = [0, 1]  [2, 7].

В) (СВ)\(АВ) = [0, 7] \ [0, 1] = [1, 7]

# ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

***Задание 1.*** Укажите множество элементов множества, соответствующие записи. Выпишите один элемент, принадлежащий множеству, и один элемент, не принадлежащий этому множеству.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| M = {x| x2 + 2x + 2 > 0} | M = {x| x2 - 5x + 6 < 0} | M = {x| x2 - x - 12  0} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| M = {x| x2 + x - 20 < 0} | M = {x| x2 - 8x - 9  0} | M = {x| x2 + 10x + 21 > 0} |

***Задание 2.*** На множестве U букв русского алфавита заданы множества А, В, С. Найти следующие множества и изобразить их кругами Эйлера.

А) (AB)C; Б) (АВ)С; В) U\( АВC)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| А = {д, о, с, к, а}  В = {л, о, д, к, а}  С = {к, н, и, г, а} | А = {г, р, у, ш, а}  В = {б, у, г, о, р}  С = {к, н, и, г, а} | А = {м, о, р, я, к}  В = {я, к, о, р, ь}  С = {к, р, о, н, а} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = {б, и, л, е, т}  В = {б, и, р, к, а}  С = {т, а, л, о, н} | А = {з, а, в, о, д}  В = {н, а, р, о, д}  С = {д, о, с, к, а} | А = {п, а, л, е, ц}  В = {ц, а, п, л, я}  С = {п, е, т, л, я} |

***Задание 3.*** Даны отрезки А, В, С. Найти следующие множества: А) (AB); Б) (АВ)С; В) (СВ)\(АВ)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| А = [-2, 7]; В = [3, 10]; C = [5, 15] | А = [-4, 2]; В = [0, 6]; C = [3, 9] | А = [0, 8]; В = [4, 12]; C = [9, 20] |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = [-6, 0]; В = [-3, 5]; C = [2, 8] | А = [0, 4]; В = [2, 9]; C = [5, 11] | А = [-1, 8]; В = [4, 13]; C = [6, 17] |

***Задание 4.***

Даны множества А, В. Определить декартово произведение множеств А) AхB; Б) АхА

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| А = {8, 9, 10} В = {а, б} | А = {а, б, с} В = {3, 4} | А = {5, 6, 8} В = {л, к} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = {о, п, р} В = {0, 1} | А = {1, 5, 10} В = {к, н} | А = {д, г, в} В = {20, 21} |

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими способами можно задать множество? 2. Поставьте в соответствие операциям над множествами логические операции?

## Практическое занятие № 2

Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна ***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить диаграммы Эйлера-Венна.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь различать задачи по типам, знать логические операции.

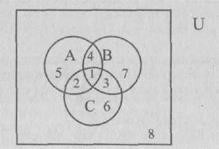
# КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Диаграммы Эйлера-Венна используются при решении большой группы логических задач.

Условно все эти задачи можно разделить на три типа.

В задачах первого типа необходимо символически выразить множества, заштрихованные на диаграммах Эйлера-Венна, используя знаки операций пересечения, объединения и дополнения. Например, выразим символически все области, которые получаются при взаимном пересечении объемов трех понятий А, В и С.

Этих областей внутри универсального множества восемь. Обозначим каждую цифрами 1-8



Теперь выразим каждое из обозначенных множеств символически:

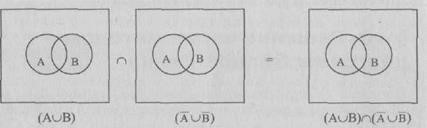


В задачах второго типа диаграммы Эйлера-Венна применяются для анализа ситуаций, связанных с определением класса. Рассмотрим одну из таких задач.

Если U — множество всех покупателей, А — покупатели хлеба, В — покупатели мяса, то каково

значение 

Изобразим ситуацию графически. Чтобы легче получать необходимый результат, целесообразно объединения классов изображать однонаправленной штриховкой, а для отыскания пересечений использовать разнонаправленную штриховку.



Очевидно, что речь идет о покупающих либо хлеб, либо мясо.

Третий тип задач, при решении которых используются диаграммы Эйлера-Венна, — задачи на логический счет. Вот одна из них.

Анкетирование 100 студентов дало следующие результаты о количестве изучающих различные иностранные языки: английский — 28 человек, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка — 3. Сколько студентов не изучают ни одного языка?

При решении подобных задач следует соблюдать ряд правил.

1. На диаграммах Эйлера-Венна изображаются все классы, включая универсальный. Каждому классу присваивается соответствующее буквенное обозначение.
2. Искомая часть заштриховывается.
3. На диаграмму наносятся численные значения соответствующих областей.

Решение. Пусть А — студенты, изучающие английский язык, Η — немецкий, Φ — французский. Тогда остальные классы являются пересечением названных. Изобразим ситуацию графически

(рис. 11).

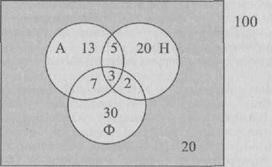


Рис. 11

Пересечение трех множеств  состоит, по условию, из трех элементов. Отметим это на схеме. Пересечение А  Н состоит из восьми элементов, три из которых уже указаны; значит, изучающих английский и немецкий языки (без французского) — пять. Аналогично находим, что пересечение А  1> состоит из десяти элементов, то есть английский и французский языки (без немецкого) изучают семь студентов; пересечение Η  Φ состоит из пяти элементов, то есть немецкий и французский (без английского) изучают два человека.

Определив численные значения пересечений, не трудно заметить из диаграммы, что изучающих исключительно английский: 28 - (5 + 7 + 3) = 13; немецкий: 30 - (5 + 2 + 3) = 20; французский: 42 - (7 + 2 + 3) = 30. Теперь, сложив все числа внутри окружностей, мы узнаем, сколько всего студентов изучает иностранные языки: 13 + 30 + 20 + 5 + 7 + 2 + 3 = 80. Значит, ни одного языка не изучает 100 - 80 = 20 студентов.

1. Если U — множество всех покупателей, А — покупателей автомобилей, В — покупателей телевизоров, С — покупателей холодильников, то каковы значения:



1. В спортивной делегации 83 человека владеют английским языком, 75 — знают французский, 10 — не знают ни английского, ни французского языков. Сколько человек владеют обоими иностранными языками, если численность делегации 100 человек?
2. Анкетирование 100 студентов дало следующие результаты о количестве изучающих различные иностранные языки: английский — 28 человек, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка — 3. Сколько студентов не изучает ни одного языка?
3. В одной известной спортивной семье семеро детей увлекались легкой атлетикой, шестеро — лыжными гонками, пятеро — велоспортом. Четверо занимались легкой атлетикой и лыжами, трое — легкой атлетикой и велоспортом, двое — лыжными гонками и велоспортом, а один увлекался легкой атлетикой, лыжами и велоспортом. Сколько детей было в семье? Сколько из них увлекалось только одним видом спорта?
4. Сколько дней в году мы работаем, а сколько отдыхаем? Займемся подсчетом. В невисокосном году 365 дней. Восемь часов в день уходит у каждого на сон — это 122 дня ежегодно. Вычитаем, остается 243 дня. Восемь часов в день — свободное от работы время — 122 дня в год. Вычитаем, остается 121 день. Выходные дни, а их в году 52, также нерабочее время. Вычитаем, остается 69 дней. В предвыходные дни рабочий день, как правило, укорочен — это 26 дней в году. Вычитаем, остается 43 дня. Далее, трехнедельный отпуск — это 21 день. Вычитаем, остается 22 дня. Полчаса каждый день, затраченные на обед, составляют в год 8 дней. Вычитаем, остается 14 дней. Праздников, объявленных нерабочими днями, набирается в год 13. Вычитаем, остается всего... один день. Этот день — 1 января, когда все празднуют приход Нового года. Но мы же работаем!

Когда?

1. В олимпиаде участвовало 50 человек. Арифметическую задачу решили 30 человек, геометрическую — 10, логическую — 9. Все три задачи решили 2 человека, арифметическую и логическую — 7, арифметическую и геометрическую — 3, логическую и геометрическую — 4. Сколько человек:
2. решили арифметическую или геометрическую задачи;
3. решили только арифметическую задачу,
4. решили арифметическую и логическую задачи, но не решили геометрическую задачу; 4) решили только логическую задачу;

5) решили логическую задачу тогда и только тогда, когда решили геометрическую задачу; 6) не решили ни одной задачи.

10. При обследовании сотрудников некоторого научного учреждения выяснилось, что 60% из них могут читать английскую специальную литературу, 30% — французскую, 20% — немецкую, 15% — и английскую, и французскую, 5% — английскую и немецкую, 2% — французскую и немецкую и 1% может читать на всех трех языках. Спрашивается, каков процент сотрудников, не способных читать ни на одном из трех языков?

# ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

|  |  |
| --- | --- |
| **ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА-ВЕННА.**  **1 ВАРИАНТ**     1. Каждая семья из нашего дома выписывает газету или журнал, или и то и другое. 60 семей выписывают газеты, 25 семей – журналы. Лишь 13 семей и журналы, и газеты. Сколько семей в доме? 2. Ребята посещают три кружка: математики, физики и химии. Решено было организовать кружок юных техников и пригласить тех ребят, которые не занимаются ни в одном из трех перечисленных. Сколько таких ребят, если всего в классе 38 человек, занимаются математикой- 16, физикой – 12, химией – 11. 3 посещают все три кружка, 6 – математику и физику, 6 – математику и химию, 4 – химию и физику. 3. В детском саду 10 деток любят манную кашу, 14 - гречневую, 8 – перловую, 4 – манную и гречневую, 3 – манную и перловую,   6 – гречневую и перловую, 2 – уплетают все три вида. Сколько детей в группе, если в ней нет ни одного кто не любит кашу?  4) Из 230 школьников 47 не играют ни во что, остальные играют в футбол или баскетбол, или и то и другое. 58 играют только в баскетбол, 120 только в футбол. Сколько человек одновременно играет в баскетбол и в футбол? | **ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА-ВЕННА.**  **2 ВАРИАНТ**     1. Каждая семья из нашего дома выписывает газету или журнал, или и то и другое. 90 семей выписывают газеты, 45 семей – журналы. Лишь 20 семей и журналы, и газеты. Сколько семей в доме? 2. Ребята посещают три кружка: математики, физики и химии. Решено было организовать кружок юных техников и пригласить тех ребят, которые не занимаются ни в одном из трех перечисленных. Сколько таких ребят, если всего в классе 42 человека, занимаются математикой- 20, физикой – 16, химией – 12. 2 посещают все три кружка, 8 – математику и физику, 5 – математику и химию, 4 – химию и физику. 3. В детском саду 16 деток любят манную кашу, 13 - гречневую, 8 – перловую, 5 – манную и гречневую, 3 – манную и перловую,   5 – гречневую и перловую, 2 – уплетают все три вида. Сколько детей в группе, если в ней нет ни одного кто не любит кашу?  4) Из 240 школьников 44 не играют ни во что, остальные играют в футбол или баскетбол, или и то и другое. 47 играют только в баскетбол, 126 только в футбол. Сколько человек одновременно играет в баскетбол и в футбол? |
| **ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА-ВЕННА.**  **1 ВАРИАНТ**     1. Каждая семья из нашего дома выписывает газету или журнал, или и то и другое. 60 семей выписывают газеты, 25 семей – журналы. Лишь 13 семей и журналы, и газеты. Сколько семей в доме? 2. Ребята посещают три кружка: математики, физики и химии. Решено было организовать кружок юных техников и пригласить тех ребят, которые не занимаются ни в одном из трех перечисленных. Сколько таких ребят, если всего в классе 38 человек, занимаются математикой- 16, физикой – 12, химией – 11. 3 посещают все три кружка, 6 – математику и физику, 6 – математику и химию, 4 – химию и физику. 3. В детском саду 10 деток любят манную кашу, 14 - гречневую, 8 – перловую, 4 – манную и гречневую, 3 – манную и перловую,   6 – гречневую и перловую, 2 – уплетают все три вида. Сколько детей в группе, если в ней нет ни одного кто не любит кашу?  4) Из 230 школьников 47 не играют ни во что, остальные играют в футбол или баскетбол, или и то и другое. 58 играют только в баскетбол, 120 только в футбол. Сколько человек одновременно играет в баскетбол и в футбол? | **10А. ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА-ВЕННА.**  **2 ВАРИАНТ**     1. Каждая семья из нашего дома выписывает газету или журнал, или и то и другое. 90 семей выписывают газеты, 45 семей – журналы. Лишь 20 семей и журналы, и газеты. Сколько семей в доме? 2. Ребята посещают три кружка: математики, физики и химии. Решено было организовать кружок юных техников и пригласить тех ребят, которые не занимаются ни в одном из трех перечисленных. Сколько таких ребят, если всего в классе 42 человека, занимаются математикой- 20, физикой – 16, химией – 12. 2 посещают все три кружка, 8 – математику и физику, 5 – математику и химию, 4 – химию и физику. 3. В детском саду 16 деток любят манную кашу, 13 - гречневую, 8 – перловую, 5 – манную и гречневую, 3 – манную и перловую,   5 – гречневую и перловую, 2 – уплетают все три вида. Сколько детей в группе, если в ней нет ни одного кто не любит кашу?  4) Из 240 школьников 44 не играют ни во что, остальные играют в футбол или баскетбол, или и то и другое. 47 играют только в баскетбол, 126 только в футбол. Сколько человек одновременно играет в баскетбол и в футбол? |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие три основных типов задач?

3. Что такое диаграммы Эйлера-Венна?

**Практическое занятие № 3.**

Исследование свойств бинарных отношений. Теория отображений и алгебра подстановок*.*

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять свойства бинарных отношений, выполнять операции над бинарными отношениями и подстановками.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

# КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**Бинарным отношением** называется любое непустое подмножество R декартова произведения XxY множеств X и Y.

Запись бинарного отношения: xRy, читается как «х и y находятся в отношении R.

**Свойства бинарных отношений.** 1. ***Рефлективност*ь**: xRx.

1. ***Антирефлективность***. Имеет место, когда отношение не обладает свойством рефлективности для любых х.
2. ***Симметричность*.** Если для любых x и y одновременно справедливо xRy и yRx.
3. ***Антисимметричность****.* Если для несовпадающих элементов x и y верно отношение xRy, то ложно yRx.
4. ***Транзитивность*.** Если xRy и yRz, то xRz.
5. ***Антитранзитивность.*** Имеет место, когда отношение не обладает свойством транзитивности.
6. ***Полнота (или связность)***. Для любыхx и y выполняется либо xRy, либо yRx, либо и то и

другое.

*Пример 1*. Определите, является ли отношение «соседи по дому» на множестве людей рефлективным, симметричным и транзитивным.

*Решение.*

Пусть М – множество соседей. Проверим выполнение свойств рефлективности, симметричности и транзитивности для отношения R(x,y) = «x сосед y»

А) Отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, так как любой человек не является своим соседом.

«x сосед х» - ложно.

Б) Оно симметрично. Например, если Иванов – сосед Петрова, то справедливо, что Петров – сосед Иванова.

Если «x сосед y», то «y сосед х».

В) отношение не транзитивно. Например, если дом Петрова расположен строго между домами Иванова и Сидорова, то Иванов с Петровым и Петров с Сидоровым – соседи, но Иванов и Сидоров соседями не являются.

Из того, что «x сосед y» и «y сосед z» не следует «x сосед z».

*Ответ:* отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, симметрично, не транзитивно. *Пример 2.* Определите является отношение R(x,y) = «x – y есть целое число» отношением рефлективности, симметричности и транзитивности. Является ли данное отношение отношением эквивалентности?

*Решение*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Свойство | Конкретный пример выполнения алгоритма |
| 1 | Рефлективность | Проверим R(x,x):  х – х = 0  Z  Отношение R рефлективно. |
| 2 | Симметричность | Если разность x – y есть целое число, то и разность y – x = - (x – y) – противоположное исходному целому, и поэтому тоже целое число.  Отношение R симметрично. |
| 3 | Транзитивность | Пусть (х – y)  Z и (y – z)  Z  Тогда (х – z) = (х – y) + (y – z) есть сумма целых числе, т.е. (х – z)  Z.  Отношение R транзитивно. |

*Ответ:* отношение «x – y есть целое число» на множестве целых числе рефлективно, симметрично, транзитивно, следовательно отношение эквивалентно.

*Пример 3*. На множестве М = {a, b, c, d, e} задано бинарное отношение R(M) = {(a, a), (a, b),

(b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}. Построить отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

*Решение*

1. По определению **обратное бинарное отношение** должно содержать все обратные пары исходного бинарного отношения:

R-1 = {(a, a), (b, a), (c, b), (d, c), (d, d), (e, d)}

1. По определению на множестве М = {a, b, c, d, e} **дополнительное** к R(M) бинарное отношение должно содержать все пары из декартова произведения, которые не принадлежат к R(M).

𝑅̅ = {(a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}

1. По определению **тождественное бинарное отношение** состоит из тождественных элементов.

U = {(a, a), (b, b),(c, c), (d, d), (e, e)}

1. По определению универсальное бинарное отношение содержит все пары из декартова произведения.

I = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}

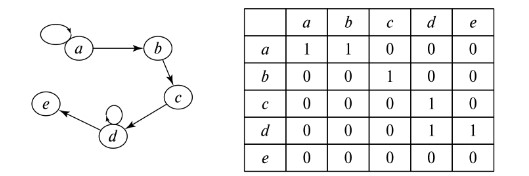
Существуют несколько основных способов задания бинарных отношений: перечисление, графическое представление, матричное представление.

При графическом представлении каждый элемент множества М представляется вершиной, а пара (x, y) представляется дугой из x в y.

Матричным способом бинарные отношения задаются с помощью матрицы смежности. Матрица смежности представляет собой квадратную матрицу m x m, где m – мощность множества М и каждый ее элемент равен единице, если пара (x, y) принадлежит R(M), и равен нулю в противном случае.

*Пример 4.* Записать графическое и матричное представление для R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}}

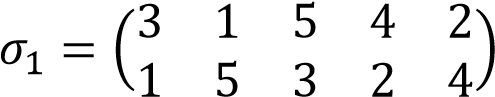
*Решение*



Взаимно-однозначное отображение множества {1,2,3, …,n} на само себя называется **подстановкой** n чисел, где n – степень подстановки.

Обычно подстановку записывают в виде двух строк, заключенных в скобки. При этом в первой строке аргументы (первые координаты), а во второй строке в соответствующие им образы (вторые координаты).

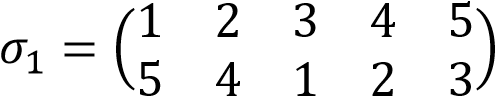
*Пример 5.* Дана подстановка:



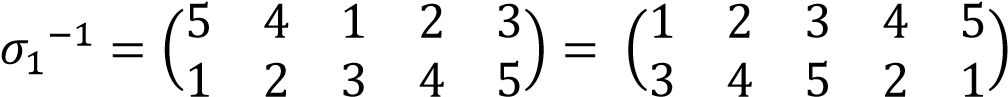
1. Приведите подстановку 1 к каноническому виду
2. Найдите обратную подстановку 1-1
3. Найдите квадрат подстановки 12

*Решение*

1. В верхней строке запишем числа в порядке возрастания от 1 до 5. В нижней – соответствующие им значения 1(1) =5, 1(2) = 4, 1(3) = 1, 1(4) = 2, 1(5) = 3.

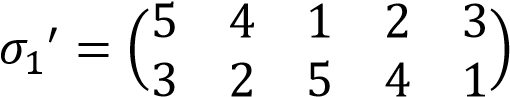
Получим - **канонический вид подстановки**

1. В каноническом виде подстановки 1 поменяем строки местами и упорядочим пары (приведем к каноническому виду) по новой первой строке.

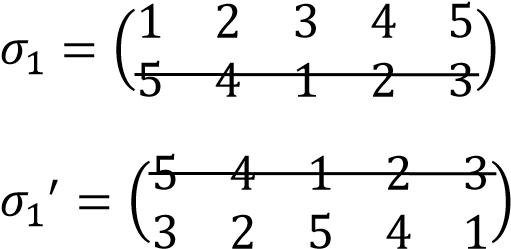
 – **обратная подстановка**

1. Определим квадрат подстановки 12

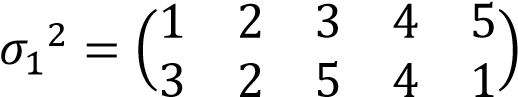
А) поменяем в каноническом виде подстановки 1 порядок столбцов так, чтобы новая строка повторяла старую вторую.



Б) подпишем подстановку  под постановкой 1 и вычеркнем одинаковые вторую и третью строки:



Получим

 **квадрат подстановки**

# ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

***Задание 1.***

*Объясните, будет ли выполнима рефлективность, симметричность или транзитивность отношений на заданных множествах, и почему:*

1. **вариант** «быть знакомым» на множестве людей
2. **вариант** «быть отцом» на множестве людей
3. **вариант** «играть в одном спектакле» на множестве актеров
4. **вариант** быть одногруппником» на множестве людей

***Задание 2.***

*Определите является ли преложенное отношение рефлектиным, симметричным и транзитивным*.

1. **вариант** «x/y – целое число»
2. **вариант** «x/y – рациональное число»
3. **вариант** «x + y – четное число»
4. **вариант** «xy – четное число»

***Задание 3.*** *На множестве М = {a, b, c, 1, 2} задано бинарное отношение R(M).*

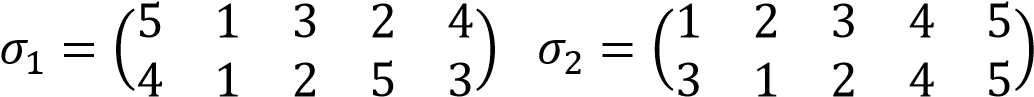
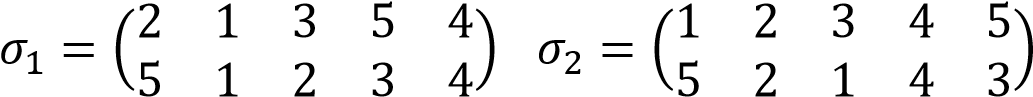
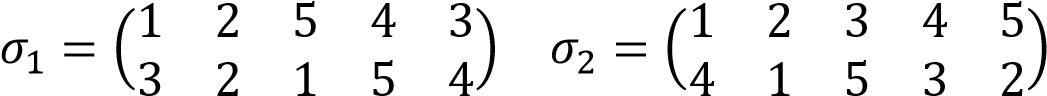
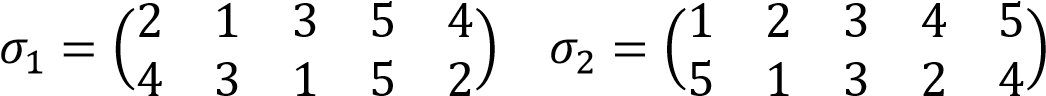
*А) Постройте отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.*

*Б) Запишите графическое и матричное представление данных бинарных отношений.*

1. **вариант** R(M) = {(a, 2), (b, 1), (b, 1), (c, c), (c, 2), (2, 2)}
2. **вариант** R(M) = {(a, b), (a, 1), (b, b), (c, 2), (1, 2), (2, 2)}
3. **вариант** R(M) = {(a, a), (a, c), (b, c), (b, 1), (c, c), (2, 2)}
4. **вариант** R(M) = {(a, c), (b, b), (b, c), (c, 1), (1, 1), (1, 2)}

***Задание 4. Выполните операции над подстановками***

* 1. *Приведите подстановку* *1 к каноническому виду*
  2. *Найдите обратную подстановку* *1-1*
  3. *Найдите произведение подстановок* *1* *2*
  4. *Найдите квадрат подстановки* *12*

1. **вариант** 
2. **вариант** 
3. **вариант** 
4. **вариант** 

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

2. Какое бинарное отношение обладает свойством эквивалентности? 4. Что такое отображение?

**Практическое занятие №4.** Формулы логики. Построение таблиц истинности.

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться формализовывать высказывания и строить таблицы истинности для формул логики.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Формулой алгебры логики** называется всякое составное высказывание, содержащее логические переменные и знаки логических операций. Для записи составного высказывания на формальном языке нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

*Пример 1*. Записать с помощью формулы логики высказывание: неверно, что если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер.

*Решение.* Обозначим буквой А высказывание: «идет дождь», буквой В высказывание: «будет солнечная погода», буквой С высказывание: «будет ветер». Разделим составное высказывание на простые и каждое запишем с помощью формулы логики:

«нет дождя» - А̅; «если нет дождя, то будет солнечная погода» - А̅В;

«дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» - 𝐴 ↔ 𝐶.

Между простыми высказываниями стоит союз «и», т.е. они соединяются с помощью конъюнкции и составное высказывание «если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» запишется в виде: (А̅В)&(𝐴 ↔ 𝐶). Т.к. перед этим составным высказыванием стоит слово «неверно», то нужно поставить отрицание над всей формулой.

В итоге заданное высказывание формализуется следующим образом: (̅̅А̅̅̅̅̅̅В̅̅)̅&̅̅(̅𝐀̅̅̅↔̅̅̅̅𝐂̅̅)**.**

*Ответ:* (̅̅А̅̅̅̅̅̅В̅̅)̅&̅̅(̅𝐀̅̅̅↔̅̅̅̅𝐂̅̅)**.**

Для каждого логического выражения можно построить таблицу истинности, позволяющую определить истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений логических переменных.

*Пример 2.* Построить таблицы истинности для формулы (̅XX)↔(XY&Z̅).

*Решение.* Определим количество строк и столбцов в таблице. Т.к. в логическое выражение входят три переменные, то по формуле 23 получим 8 строк. Количество столбцов равно количеству логических переменных (3) + количество операций (6), получим 9 столбцов. Учитывая приоритет операций, расставляем порядок действий (𝑋̅12X)↔6(X5Y&4𝑍̅3). Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | 𝑋̅ | ̅XX | Z̅ | Y&Z̅ | XY&Z̅ | (̅XX)↔(XY&Z̅) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

***Задание 1.***

*В следующих высказываниях выделить простые, обозначив каждое из них буквой. Записать составное высказывание с помощью формулы логики.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| А) На уроке физики ученики выполняли лабораторную ра-  боту и сообщали результаты исследований учителю  Б) Если светит солнце и не дует ветер, то не будет дождя  С) Произведение двух чисел не равно нулю тогда и только  тогда, когда одно из них не  равно нулю | А) Катя любит писать сочинения или решать задачи.  Б) Если дует ветер, то солнце светит тогда и только тогда, когда нет дождя  С) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все  стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб. | А) Если Маша сестра Саши, то Саша брат Маши  Б) Погода будет солнечной тогда и только тогда, когда ни будет ни ветра, ни дождя С) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не де-  лится на 6 |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А) Голова думает тогда и только тогда, когда язык отдыхает  Б) Неверно, что если дует ветер и солнце светит, то нет дождя С) Если число делится на 2 и не делится на 5, то оно не де-  лится на 10 | А) Земля движется по круговой или эллиптической орбите  Б) Если ветра нет, то дождь будет тогда и только тогда,  когда будет пасмурная погода  С) Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю. | А) Ты можешь купить в магазине продукты, если у тебя есть деньги  Б) Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет  тогда и только тогда когда нет ветра  С) Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15. |

***Задание 2.***

*Построить таблицы истинности для формул*:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| ̅𝑥̅̅↔̅̅̅̅𝑦̅x | ̅𝑥̅̅̅̅𝑦̅&x | (x&y)𝑥̅ |
| *x*&*y**~~z~~**~~y~~* *z* | (*x* *y*&*~~z~~*)(*x*&*y*) | *~~x~~*  *y**x* *y*&*~~z~~* |
| (̅̅(̅𝑋̅̅̅∨̅̅𝑌̅̅)̅&̅̅̅(̅𝑍̅̅̅↔̅̅̅𝑋̅̅)̅̅)&(𝑍 ∨ 𝑌) | (𝑋&𝑌)&̅(̅𝑋̅̅̅̅∨̅̅𝑋̅̅̅)&(𝑍 ↔ 𝑌) | ̅(̅(̅𝑋̅̅̅∨̅̅𝑍̅̅)̅&̅̅̅(̅𝑍̅̅̅↔̅̅̅𝑋̅̅)̅̅)&(𝑍 → 𝑌) |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| (𝑥̅y)↔x | x(̅𝑥̅&̅̅̅𝑦̅) | x↔(̅𝑥̅̅̅𝑦̅) |
| *x* *~~y~~*&*x**z**~~x~~* | *~~x~~**z**x**y*&*~~z~~* | *x**y**~~z~~*&*x* *y* |
| ̅(̅𝑋̅̅̅∨̅̅̅𝑌̅̅) ∨ (𝑍 → 𝑥)&(𝑍 ↔ 𝑌) | (𝑋 ↔ 𝑌)&̅(̅𝑍̅̅̅∨̅̅𝐷̅̅̅) | (𝐴 → 𝐵)∨𝐴̅&(𝐶 ↔ 𝐷) |

***Задание 3.***

*С помощью таблицы истинности установить, равносильны ли следующие формулы*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| *A*&*B* и *A**B* | *B**A* и *B*&*A* | *A**B* и *A*&*B* |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| *A*&*B* и *A**B* | *B**A* и *B*&*A* | *A**B* и *A*&*B* |

**Задание 4.**

*Символом F обозначается одно из указанных ниже логических выражений. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?*

Варианты I, III

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | F |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

1. 𝑋̅&𝑌&𝑍̅
2. 𝑋 ∨ 𝑌̅ ∨ 𝑍
3. 𝑋&𝑌̅&𝑍 4) 𝑋̅ ∨ 𝑌 ∨ 𝑍̅

Вариант II, IV

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | F |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1. 𝑋 ∨ 𝑌 ∨ 𝑍
2. 𝑋&𝑌&𝑍̅
3. 𝑋̅&𝑌&𝑍̅ 4) 𝑋 ∨ 𝑌̅ ∨ 𝑍

Вариант III, V

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | F |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

1) (𝑋 ∨ 𝑌̅)&𝑍 2) (𝑋&𝑌̅) ∨ 𝑍

1. 𝑋 ∨ 𝑌̅ ∨ 𝑍̅
2. 𝑋&𝑌̅&𝑍̅

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем разница между простыми и составными высказываниями?
2. Что такое таблица истинности?
3. Как определяется количество строк в таблице истинности?

**Практическое занятие №5.**

Представление булевой функции в виде минимальной ДНФ и КНФ

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться минимизировать булевы функции с помощью равносильных преобразований и графическим методом карт Карно.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Нормальная форма называется ***минимальной***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

***Минимальная нормальная*** форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). ***Тупиковой нормальной формой*** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной

*Пример 1.* Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а)составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую

схему, реализующую данную функцию.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | F(x,y,z) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | **1** |

*Решение.*

а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

F(x,y,z) = 𝑥̅yzxy𝑧̅xyz

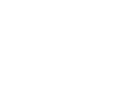
б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

F(x,y,z) = 𝑥̅yzxy𝑧̅xyz =(𝑥̅yzxyz) xy𝑧=̅ yz(𝑥̅x) xy𝑧 ̅ = yzxy𝑧 ̅ = y(zx𝑧)̅ = y(zx)(z𝑧)̅ = y(zx)

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:

# x zx

y Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический 1 & F = y(zx) метод карт Карно. z **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2n клеток (n – количество переменных).



В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с 23 = 8 клетками:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 𝑥̅𝑦̅ 00 | 𝑥̅𝑦 10 | 𝑥𝑦 11 | 𝑥𝑦̅ 01 |
| z 1 |  |  |  |  |
| 𝑧 ̅ 0 |  |  |  |  |

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с 24 = 16 клетками.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 𝑧̅𝑑̅ | 𝑧d̅ | zd | z𝑑̅ |
| 𝑥̅𝑦̅ |  |  |  |  |
| 𝑥̅𝑦 |  |  |  |  |
| хy |  |  |  |  |
| 𝑥𝑦̅ |  |  |  |  |

*Пример 2.* Дана функция F(x,y,z) = 𝑥̅y𝑧̅𝑥̅yzxy𝑧̅xyz. Построить минимальную нормальную форму данной функции. *Решение 1 способ: с помощью равносильных преобразований*

F(x,y,z) = 𝑥̅y𝑧̅𝑥̅yzxy𝑧̅xyz = (𝑥̅y𝑧̅𝑥̅yz)(xy𝑧̅xyz) = 𝑥̅y(𝑧̅z)  xy(𝑧̅z) = 𝑥̅y  xy = y(𝑥̅  x) = y

*2 способ: с помощью карт Карно*

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

𝑥

̅

𝑦

̅

00

𝑥

̅

𝑦

10

𝑥𝑦

11

𝑥

𝑦

̅

01

z

1

0

1

1

0

𝑧

̅

0

0

1

1

0

1. Обведем единицы попарно двумя контурами.
2. В первом контуре не меняются переменные 𝑥̅𝑦, во втором – переменные 𝑥𝑦.
3. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: **F(x,y,z) =** 𝒙̅𝒚**xy = y**.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

𝑥

̅

𝑦

̅

00

𝑥

̅

𝑦

10

𝑥𝑦

11

𝑥

𝑦

̅

01

z

1

0

1

1

0

𝑧

̅

0

0

1

1

0

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная y, следовательно, **F(x,y,z) = y**.

*Ответ*: минимальная нормальная форма: **F(x,y,z) = y**.

*Пример 3.* Построить минимальную форму для булевой функции, заданнойтаблично.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **F** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

*Решение*

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

𝑥

̅

𝑦

̅

00

𝑥

̅

𝑦

10

𝑥𝑦

11

𝑥

𝑦

̅

01

z

1

1

𝑧

̅

0

1

1

1

1

1. Обведем единицы в два контура.
2. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные 𝑥𝑦.
3. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) =** 𝒛**xy**.

*Ответ:* F(x,y,z) = 𝑧xy.

Кроме рассмотренных методов минимизации существуют также метод Куайна, метод диаграмм Вейча. Минимальную нормальную форму удобно использовать при построении логических схем.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1*.** Привести СДНФк минимальной двумя способами: а) с помощью равносильных преобразований; б) с помощью карт Карно.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| F(x,y,z) = 𝑥̅𝑦̅𝑧̅𝑥𝑦̅𝑧̅ x𝑦̅zxyz | F(x,y,z) = 𝑥̅𝑦̅𝑧𝑥𝑦̅𝑧̅ x𝑦̅zxy𝑧 ̅ |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = 𝑥̅𝑦̅𝑧𝑥̅𝑦𝑧̅x𝑦̅zxy𝑧 ̅ | F(x,y,z) = 𝑥̅𝑦̅𝑧𝑥̅𝑦̅𝑧̅ 𝑥̅𝑦zx𝑦̅𝑧 ̅ |

***Задание 2.***

Для данной булевой функции а)составить СДНФ; б) минимизировать СДНФ с помощью равносильных преобразований и карт Карно; в) построить логическую схему, реализующую функцию.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = (11001000) | F(x,y,z) = (01010100) | F(x,y,z) = (11000100) | F(x,y,z) = (00110010) |

***Задание 3.*** Постройте минимальную форму для функции, выраженной картой Карно.

## I вариант

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 𝑧̅𝑑̅ | 𝑧d̅ | zd | z𝑑̅ |
| 𝑥̅𝑦̅ | 1 |  |  | 1 |
| 𝑥̅𝑦 |  | 1 | 1 | 1 |
| 1хy |  |  |  |  |
| 𝑥𝑦̅ | 1 |  | 1 | 1 |

## II вариант

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 𝑧̅𝑑̅ | 𝑧d̅ | zd | z𝑑̅ |
| 𝑥̅𝑦̅ |  | 1 | 1 |  |
| 𝑥̅𝑦 |  | 1 | 1 | 1 |
| 1хy |  |  |  | 1 |
| 𝑥𝑦̅ |  | 1 | 1 |  |

## III вариант

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 𝑧̅𝑑̅ | 𝑧d̅ | zd | z𝑑̅ |
| 𝑥̅𝑦̅ | 1 | 1 |  | 1 |
| 𝑥̅𝑦 | 1 | 1 |  |  |
| 1хy |  |  |  |  |
| 𝑥𝑦̅ |  | 1 | 1 | 1 |

## IV вариант

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 𝑧̅𝑑̅ | 𝑧d̅ | zd | z𝑑̅ |
| 𝑥̅𝑦̅ | 1 | 1 |  | 1 |
| 𝑥̅𝑦 |  |  | 1 | 1 |
| 1хy | 1 |  |  |  |
| 𝑥𝑦̅ | 1 | 1 |  |  |

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие еще существуют методы минимизации булевых функций?
2. Почему при построении логических схем удобнее использовать минимальную форму булевой функции?

### Практическое занятие №6

Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться находить область определения и истинности предиката; выполнять логические операции над предикатами; формализовывать предложения, используя предикаты и кванторы; строить отрицания к высказываниям, содержащим кванторы.

Для выполнения работы необходимо знать основы языка и алгебру предикатов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

## КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**Предикатом** называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество М, на котором определен предикат P(х), называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов х  М , при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (Т).**

***Пример 1.*** Найти множество истинности предиката Р(х): 6х2 – 24 = 0, если его область определения множество всех действительных чисел.

*Решение*

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

6х2 – 24 = 0 x2 = 4 x1= -2, x2 = 2.

*Ответ:* Множество истинности Т(Р) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

***Пример 2***. На множестве М = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) & D(x); А(𝑥) ∨ С (x); 𝐵̅ (x); 𝐵(𝑥) → D (x) и найти их множества истинности.

*Решение*

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:

Т(А) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}

Т(В) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

Т(С) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

Т(D) = {5, 10, 15, 20}

1. A(x) & D(x): «число х не делится на 4 и кратно 5» Т(А&D) = {5, 15}
2. А(𝑥) ∨ С (x): «число х не делится на 4 или простое»

Т(АС) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}

1. 𝐴̅ (x): «х делится на 4» Т(𝐴̅ ) = {4, 8, 12, 16, 20}
2. 𝐵(𝑥) → D (x): «если х нечетное число, то оно кратно 5»

Т(В→D) = T (𝐵̅D)

T (𝐵̅) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

T (𝐵̅D) = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации:

квантор общности и квантор существования.

**Квантор общности (универсальный квантор) -** х.

**хР(х)** – для всех (любого) х истинно Р(х). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат Р(х) выполняется для каждого значения переменного х.

**Квантор существования** - х.

**хР(х) –** существует х, такой что истинно Р(х). Это высказывание истинно тогда и только тогда,

когда для некоторых значениях х выполняется предикат Р(х).

***Пример 3.*** Запишите высказывание для символичной записи (х)(y): (x2+ y2 > 25).

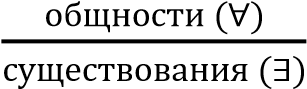
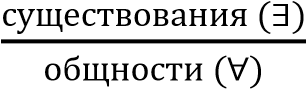
Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел. *Решение*

Данную запись можно представить высказыванием: существует х и существует y, такие что x2+ y2 > 25. Высказывание является истинным, т.к. можно найти пару чисел х и y, для которых будет выполняться выражение x2+ y2 > 25 (например, х = 3 и y = 5).

***Пример 4.*** Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты. *Решение*

1. Найдем область определения М: х – множество всех улиц y – множество всех праздников
2. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.

Данное высказывание в симвоичной форме запишется в виде: (x)( y)P(x, y)

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор , достаточно заменить его на другой квантор  и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

***Пример 5.*** Для данных высказываний построить их отрицание.

* 1. A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

А̅: «Некоторые целые числа не являются простыми»

* 1. А: «Некоторые люди любят есть репу»

Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

А̅: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению "Все р есть q" соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество р, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые р есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме

пересечение кругов, изображающих множества р и q, непусто.



P



Q



P



Q

рис. 1 рис. 2

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

***Задание 1.*** Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| А) **P (x):** x2 – 4 = 0; Б) **Q(x):** 3x – 2 < 17 | А) **P (x):** 2x2 – 18 = 0; Б) **Q(x):** 2x + 3 < 15 |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| А) **P (x):** 3x2 – 12 = 0; Б) **Q(x):** 5x – 4 > 29 | А) **P (x):** x2 – 9 = 0; Б) **Q(x):** 4x + 6 > 12 |

***Задание 2.*** На множестве М = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| A (x) & B(x); 𝐶 (𝑥) ∨ D (x); 𝐵̅ (x); 𝐴 (𝑥) → C (x); | C (x) & B (x); 𝐵 (𝑥) ∨ D (x); 𝐶̅ (x); 𝐶 (𝑥) → A (x); |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| C (x) & D (x); 𝐵(𝑥) ∨ C (x); 𝐴̅ (x); 𝐷 (𝑥) → 𝐶(x); | B (x) & D (x); 𝐴 (𝑥) ∨ B (x); 𝐷̅ (x); 𝐴 (𝑥) → B (x); |

***Задание 3.*** Записать высказывание и определить его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| (x) (y): (x + y = 10)  (x) (y) (z): x\*y = z | (x) (y): (x + y = 8) (х) (y): (х>y) |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| (x) (y) (x – y = 7) (х) (y): (х+y>0) | (x) (y) (x – y = 5)  (z) (y) (x): x + y = z |

***Задание 4.*** Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| У каждого человека есть мать.  Некоторые студенты – второкурсники. | Существуют города, которые больше Москвы. На каждом доме есть номер. |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| Каждое материальное тело имеет массу.  Существуют кустарники, которые больше чем деревья. | Некоторые космические тела являются астероидами.  У любой группы есть классный руководитель |

***Задание 5.*** Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы***.***

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| Все планеты имеют атмосферу. Некоторые люди ходят в театр. | Некоторые студенты учатся на «отлично». Все птицы улетают зимой в теплые края. |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| Некоторые машины красного цвета.  Все компьютеры подключены к Интернету. | Все кошки любят молоко.  Некоторые приборы исправны. |

***Задание 6.*** Проверьте правильность умозаключений.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** |
| a) Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров. | a) Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки. |
| b) Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты. | b) Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо. |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| 1. Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты. 2. Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты. | 1. Все машины дорогие. Велосипед не дорогой. Велосипед – не машина. 2. Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор. |

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каких условиях высказывания хР(х) и хР(х) истинны?
2. Где используются предикаты и кванторы?
3. Как с помощью диаграмм Эйлера строятся высказывания содержащие кванторы общности и существования?

**Практическое занятие №7** Методы криптографической защиты информации

**Цель:** Научиться шифровать информацию различными методами

**Краткая теория** Проблемой защиты информации путем ее преобразования занимается *криптология* (*kryptos* – тайный, *logos* – наука). *Криптография* занимается поиском и исследованием математических методов преобразования информации. Перечислим основные понятия:

***Алфавит*** – конечное множество используемых для кодирования информации знаков.

***Текст*** – упорядоченный набор из элементов алфавита.

***Шифрование*** – преобразовательный процесс

***Дешифрование*** – обратный шифрованию процесс. На основе ключа шифрованный текст преобразуется в исходный.

***Ключ*** – информация, необходимая для беспрепятственного шифрования и дешифрования исходных текстов.

Существует много различных методов шифрования. Рассмотрим некоторые из них.

**Методы перестановки.**

Этот метод заключается в том, что символы шифруемого текста переставляются по определенным правилам внутри шифруемого блока символов. Рассмотрим некоторые разновидности этого метода.

1. Самая простая перестановка – написать исходный текст задом на перед и одновременно разбить шифрограмму на пятерки букв. Например из фразы

ПУСТЬ БУДЕТ ТАК КАК МЫ ХОТЕЛИ

получим сделаем шифротекст: в исходной фразе до кратности пяти не хватает одной буквы. Допишем в конец любую букву и перевернем фразу:

ПУСТЬ БУДЕТ ТАК КАК МЫ ХОТЕЛИО

ОИЛЕТ ОХЫМК АККАТ ТЕДУБ ЬТСУП

|  |
| --- |
|  |

1. Во время Гражданской войны в США в ходу был следующий шифр: исходную фразу писали в несколько строк (например 15). Оставшиеся пустыми ячейки таблицы заполняли «пустышками» (любыми символами).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| П | У | С | Т | Ь | Б | У | Д | Е | Т | Т | А | К | К | А |
| К | М | Ы | Х | О | Т | Е | Л | И | К | Л | М | Н | О | П |

После этого вертикальные столбцы по порядку писали в строку с разбивкой на пятерки:

ПКУМС ЫТХЬО БТУЕД ЛЕИТК ТЛАМК НКОАП

|  |
| --- |
|  |

1. Вариант этого шифра: исходную фразу писать в столбцы, а затем на пятерки разбивать строки:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| П | С | Ь | У | Е | Т | К | А | М | Х | Т | Л | А | В | Д |
| У | Т | Б | Д | Т | А | К | К | Ы | О | Е | И | Б | Г | Е |

ПСЬУЕ ТКАМХ ТЛАВД УТБДТ АККЫО ЕИБГЕ

1. Исходный текст можно записать в квадратную таблицу и списать из нее, например по диагоналям:

ПУУСДК ТЕКХЬТ АОАБТК ТБЖАМЕ ВЗЫЛГИ ИДКЕЛМ



1. Часто используются перестановки с ключом

Выберем в качестве ключа слово «*информация*». Пронумеруем ключ (первая, из имеющихся в ключе, в алфавите буква А, следовательно ей присваивается номер 1; следующая по алфавиту буква И, следовательно первая буква И будет иметь номер 2, а вторая – 3; далее идет буква М, ей присваиваем номер 4 и т.д.):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | и | н | ф | о | р | м | а | ц | и | я |  |
| 2 | 5 | 8 | 6 | 7 | 4 | 1 | 9 | 3 | 10 |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

Запишем в таблицу нашу фразу под ключом. Оставшиеся ячейки до конца строки заполняют «пустышками».

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | и | н | ф | о | р | м | а | ц | и | я |  |
| 2 | 5 | 8 | 6 | 7 | 4 | 1 | 9 | 3 | 10 |
| П | У | С | Т | Ь |  | Б | У | Д | Е |
| Т |  | Т | А | К |  | К | А | К |  |
| М | Ы |  | Х | О | Т | Е | Л | И | Ф |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

Переписываем столбцы, учитывая их номер:

БКЕПТМДКИ ТУ ЫТАХЬКОСТ УАЛЕ Ф

Для дешифрования зашифрованный текст записывается в таблицу по столбцам, учитывая их номер.

|  |
| --- |
|  |

6. **Гамильтоновы пути.**

Выбираем ключ и нумеруем его как в предыдущем методе. Символы шифруемой фразы нумеруем по порядку в пределах ключа. Затем переставляем символы исходного текста, учитывая номер ключа.

Ключ: л е г е н д а

6 4 2 5 7 3 1

Получаем текст:

**Шифрование методом гаммирования.**

Суть этого метода состоит в том, что сим

волы исходного текста последовательно скла-

дываются с символами некоторой специальной последовательности (гаммы).

Символы исходного текста и гаммы заменяются их числовыми эквивалентами по но-

меру в алфавите. Обозначим символы исходного текста

*х*

*i*

, символы

гаммы

–

*g*

*i*

, число

символов в алфавите

–

*n*

, зашифрованный текст

–

*y*

*i*

.

Тогда шифрование выполняется по формуле

Дешифрование будет выполняться по формуле

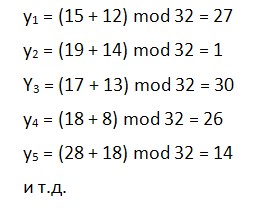
.

*Например.*

Запишем исходную фразу, а над ней гамму. В качестве гаммы возьмем слово монитор.

Все симво

лы заменяем числовыми эквивалентами.



**Ход работы:**

Криптографическое закрытие информации с помощью метода гаммирования

Криптографическое закрытие информации с помощью аналитических преобразований

**Выполнение работы:**

Зашифровать текст методом гаммирования: а) эквивалентностью;

б) неэквивалентностью. Гамма: число 1435710.

Зашифровать текст с помощью аналитических преобразований, взяв качестве ключа квадратную матрицу третьего порядка

4 8 3

 

*А*8 5 2

3 2 1

Вывод:

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант |  | Текст |
| 1 | КОНТРОЛЬ ЦЕЛОСТНОСТИ |  |
| 2 | АВТОРИЗАЦИЯ |  |
| 3 | АДДИТИВНЫЙ МЕТОД |  |
| 4 | БЕЗОПАСНОСТЬ |  |
| 5 | АККРЕДИТЦИЯ |  |
| 6 | АЛГОРИТМ |  |
| 7 | АУТЕНТИФИКАЦИЯ |  |
| 8 | АКЦЕНТИРОВАНИЕ |  |
| 9 | ЗАЩИТА ДАННЫХ |  |
| 10 | ИДЕНТИФИКАЦИЯ |  |
| 11 | КОМПРОМЕТАЦИЯ |  |
| 12 | КОНФИДЕНЦИАЛЬНОСТЬ |  |
| 13 | МОДИФИКАЦИЯ | |
| 14 | ЦЕЛОСТНОСТЬ | |
| 15 | ЭКРАНИРОВАНИЕ | |
| 16 | УПРАВЛЕНИЕ | |
| 17 | ТРОЯНСКИЙ КОНЬ | |
| 18 | ОРАНЖЕВАЯ КНИГА | |
| 19 | ЛОКАЛЬНАЯ СЕТЬ | |
| 20 | СЕРВЕРНАЯ ОС | |
| 21 | АВТОРИЗАЦИЯ | |
| 22 | КЛЮЧ ЗАЩИТЫ | |
| 23 | МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ | |
| 24 | ИНТЕРФЕЙС | |
| 25 | ЖЕЛТАЯ КНИГА | |
| 26 | ЖЕСТКИЙ ДИСК | |
| 27 | УСТАНОВОЧНЫЙ ДИСК | |
| 28 | МАНДАТНЫЙ ДОСТУП | |
| 29 | СЕТЕВАЯ ОС | |
| 30 | КОМПЬЮТЕРНЫЙ СТОЛ | |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Перечислите основные понятия *Криптографии?* 2. Где используются *Криптография*?

**Практическое занятие №8.**

Построение графов по исходным данным

**Цель работы:** Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории графов».

**Краткие теоретические сведения.**

Граф G задается множеством *вершин* (точек) Х = {х1, ..., хn} и множеством *ребер* (линий)

А = {а1, .., аn}, соединяющих между собой все или часть этих вершин. Таким образом, граф G полностью определяется заданием двух множеств (Х, А).

*Ребра графа* – линии, соединяющие вершины, указывают на соответствие между вершинами в графе.

Запись g = (xi, xj) говорит, что ребро g *инцидентно* вершинам хi и xj, а вершины хi, xj *инцидентны* ребру g. Две вершины хi, xj называются *смежными*, если они определяют ребро графа. Два ребра графа называются *смежными*, если их концы имеют общую вершину.

*Степенью m(х)* графа G(X) в вершине х называется число ребер, инцидентных вершине х. *Маршрутом* в произвольном графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной.



х

2



х

3



х

1



х

5



х

4

*Цепь* – последовательность ребер S = (g1, g2, ..., gn), в которой у каждого ребра gk одна из вершин является вершиной ребра gk-1, а другая - вершиной ребра gk+1. При этом одно и то же ребро или вершина может встречаться несколько раз. Пример цепи для графа (рис. 7):



х

2



х

0



х

5



х

3



х

1



х

4



х

6



х

7



х

8



х

9



х

0



х

5



х

4



х

1



х

3



g

0



х

2



g

4



g

5



g

2



g

1



g

3



g

6

S = (g0, gl, g2, g3, g4, g5, g2, gб) = ((x0, х1), (х1, х2), (х2, х3), (х3, х1), (х1, х4), (х4, х3), (х3, х2), (х2, х5)).

Рис. 6. Пример цепи

*Подграфом* GA(A) графа G(X), где А  X, называется граф, вершинами которого являются элементы множества А  X, а ребрами – все ребра из G, концевые вершины которых лежат в А (рис. 8).

Рис. 7. Граф G(X)

Таким образом, подграф содержит *часть вершин* вместе с ребрами, соединяющими эти вершины. Иначе, GA(A) – подграф графа G(X), если А  X и



х

2



х

1



х

3



х

0



х

4

GA(x) = G(x)А  х  Х.

Рис. 8. Подграф GA(A) графа G(X)

*Компонентой связности* неориентированного графа G(X) называется подграф НА(А) графа G(X) с множеством вершин А  X и множеством ребер в G(X), инцидентных только вершинам из А, причем ни одна вершина xi  А не смежна с вершинами из множества Х \ А (рис. 9).

Рис. 9. Граф с двумя компонентами связности

*Деревом* называется конечный связный неориентированный граф, состоящий, по крайней мере, из двух вершин и не содержащий циклов. Такой граф не имеет петель и кратных ребер. Рис. 10. Дерево

*Цикломатическое число.*Пусть G(X) – неориентированный граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Цикломатическим числом графа G называется число µ(G) = m - n + k.

Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу базисных (независимых) циклов в графе.

*Остовом T*графа G называется называется подграф графа в виде дерева, содержащий все его вершины. Остов определяет каркас графа.

*Кодеревом T\**остова Т называется подграф графа G, содержащий все вершины и только те ребра, которые не входят в остов Т. Ребра остова называют ветвями, а ребра кодерева - хордами. *Обход графа* **-** это маршрут, содержащий все ребра или вершины графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными обходами графа являются эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы.

*Теорема (Эйлера).*Конечный связный неориентированный мультиграф является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют вершины нечетной степени.

*Гамильтоновой цепью*в неориентированном графе называется цепь, проходящая через каждую его вершину один и только один раз.

*Гамильтоновым циклом*в неориентированном графе называется цикл, проходящий через каждую вершину один и только один раз за исключением начальной вершины, которая совпадает с конечной.

*Гамильтоновым путем*в ориентированном графе называется путь S = (х1, ..., хn), проходящий через все вершины графа, притом только по одному разу.

*Гамильтоновым контуром*называется контур М=(х0, х1, ..., хn, х0) в ориентированном графе G(X), если он проходит через все вершины графа по одному разу.

*Граф* отношения R  X  X строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки - элементы множества X. Пара точек х и у соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (х, у) принадлежит отношению R.

*Матрица* отношения R  X  X – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки х и столбца у ставится 1, если пара (х, у)  R; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй – номеру столбца.

Пусть X = {х1, х2, …, хn}. Тогда матрица отношения

R  X  X имеет n строк и n столбцов, а ее элемент rij определяется по правилу:

1, если (xi, yj)  R, где i = l, 2, ..., n; j = l, 2, ..., n.



1



2



3



4



а



б

1

0

1

1

4

0

1

0

1

3

0

0

1

1

2

0

0

0

1

1

4

3

2

1

r = 0, если (xi, yj)  R.

Рис.11. Граф отношения Q (а) и матрица отношения Q (б)

Если в графе G(X) через аij обозначить число дуг, идущих из xi в xj, то матрица A = || аij || (i = 1, ..., n; j=1, ..., n; где n – число вершин графа) называется *матрицей смежности вершин графа*. Наличие нулевого элемента на главной диагонали означает отсутствие петли в соответствующей вершине. Рис. 12. Пример графа для определения матрицы смежности A

x1 x2 x3 x4 x5



х

5



х

2



х

3



х

1



х

4

x10 1 0 0 1

x20 0 0 0 1

А 

x30 1 0 1 0 x40 0 0 0 1 x50 0 0 0 1

Для неориентированного графа матрица R = || rij || размером n х m, где:

1, если хi (i = 1, ..., n) инцидентна gj (j = 1, ..., mrij )=, 0, в противном случае называется *матрицей инциденций для ребер* графа.

Функция f(x1, х2, ..., xn), принимающая логическое значение (1 или 0**)** изависящая от логических переменных, называется *логической функцией.*

Область определения логической функции – совокупность всевозможных n-мерных наборов из нулей и единиц, а для её задания достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов (табл.2.)

**Порядок проведения работы:**

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

**Перечень заданий.**

Задан граф *G*=(*X*, *U*)



x

2



x

1



x

4



x

3



x

6



x

5

1) Записать матрицу смежности. 2) Пронумеровать ребра и построить матрицу инциденций. g1 →(x1, x2) g2 →(x2, x3) g3 →(x3, x4) g4 →(x1, x5) g5 →(x4, x6) g6 →(x3, x6) g7 →(x2, x5) g8 →(x3, x5) g9 →(x2, x6) g10 →(x5, x6)

3)Найти степени всех вершин графа *m*(*xi*), (x*i*·*X*) и вычислить сумму *m*(*xi*).

1. Построить простую цепь максимальной длины, связывающую вершины *х*1 и *х*5.
2. Построить эйлеров цикл (начиная с x1, все ребра проходить один раз и вернуться в x1).
3. Удалив из графа ребро g4 , соединяющие вершины{*х*1,*х*3}, построить эйлерову цепь.
4. Привести пример гамильтонова цикла, начинающегося с вершины х1 Найти цикломатическое число и привести пример дерева, являющегося составным подграфом.

**Выполнение работы:**

Дана матрица А.

А) Постройте соответствующий ей граф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного графа.

Б) Постройте соответствующий ей орграф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности.

Найдите матрицу инцидентности для построенного графа.

1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0

     

1) *А*11 02 02 11 2) *А*10 22 02 11 3) *А*10 22 12 02

     

0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 2 1

0 1 1 0 2 0 0 1 1 2 0 1

     

4) *А*11 02 10 23 5) *А*00 02 02 11 6) *А*02 12 02 11

     

0 2 3 0 1 1 1 0 1 1 1 0

0 1 0 3 0 1 0 0 0 1 2 1

     

1 0 2 1 1 0 1 1 1 1 0 2

# 7) *А*0 2 0 0 8) *А*0 1 2 3 9) *А*2 0 1 1

     

3 1 0 1 0 1 3 0 1 2 1 1

1 2 0 1  

2 0 1 1

10) *А*0 1 0 3

 

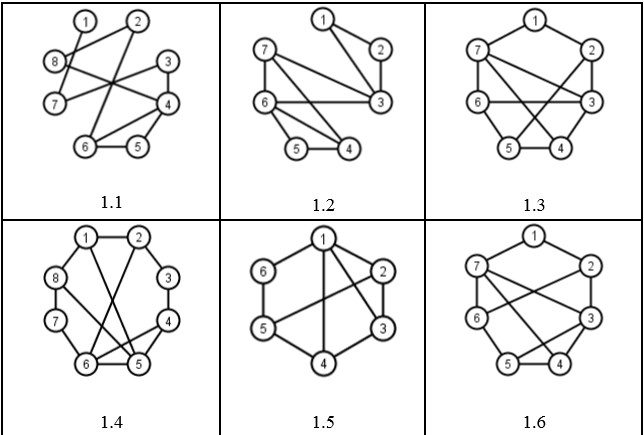
1 1 3 0

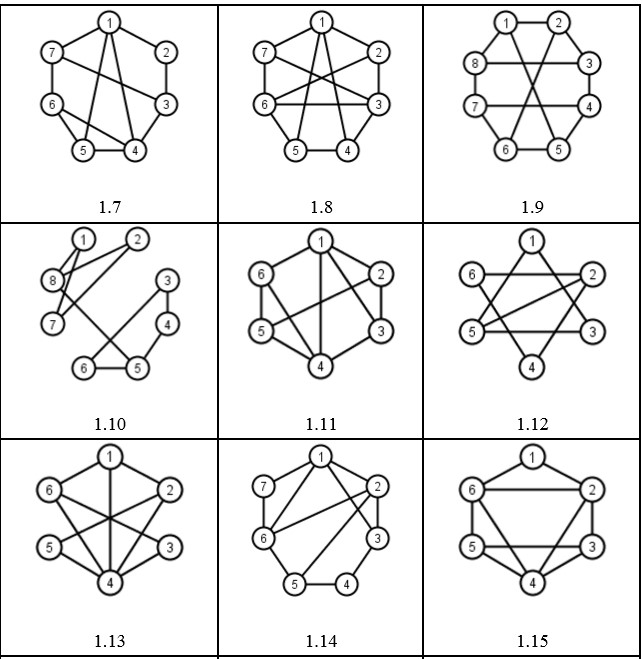
4.4.2 Постройте объединение, пересечение и сумму по модулю два графов G1, G2 и G3.Для полученных графов постройте матрицы смежности и инцидентности. (Гончаров Г.А. Мочалин А.А.

Элементы дискретной математики. Задание 4.9 стр. 95-98 (по вариантам)).

4.4.3 Для заданного графа найдите:

А) матрицы смежности вершин, ребер и инцидентности.





**Вывод:**

**Содержание отчета** Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

**Практическое занятие №9**

Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться определять основные характеристики графов и решать задачи с их применением.

Для выполнения работы необходимо знать основные понятия теории графов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

**ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:**90 минут.

## КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

***Графом*** G = (V, X) называется пара двух конечных множеств: V – множества вершин и Х – множества ребер. Если у ребер не указано направление, то такой граф называется ***неориентированным***, у ***ориентированного*** графа каждое ребро имеет направление.

***Мультиграфом*** называется граф, содержащий кратные ребра.

***Псевдографом*** называется граф, содержащий петли или/и кратные ребра.

***Степенью вершины*** графа deg(V) называется количество ребер ей инцидентных.

**Операции над графами:**

1. Объединение графов включает все вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
2. Пересечение графов включает только одинаковые вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
3. Кольцевая сумма содержит объединение графов без их пересечения.
4. Дополнение содержит те вершины и ребра, которые не хватает исходному графу до полного графа.

***Эйлеровым графом*** называется граф, содержащий эйлеров цикл (цикл, содержащий все ребра графа только один раз).

***Гамильтоновым графом*** называется граф, содержащий гамильтонов цикл (цикл, проходящий через каждую вершину только один раз).

***Матрицей инцидентности*** неориентированного графа (неографа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершинам) и m столбцов (ребер), в которой могут быть следующие значения:

* + 1, если вершина инцидента ребру  0, если вершина не инцидентна ребру  2, если ребро является петлей.

***Матрицей инцидентности*** ориентированного графа (ортграфа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершин) m столбцов (ребрам), в которой могут быть следующие значения:

* + -1, если вершина является началом ребра
  + 0, если вершина не инцидентна ребру
  + 1, если вершина является концом ребра  ±1, если ребро является петлей.

**Матрицей** смежности графа называется квадратная матрица с n элементам (по числу вершин), в которой могут быть следующие значения:

* + 0, если между вершинами нет ребра
  + λ, если между вершинами есть ребро с кратностью λ

*Пример 1.*Граф G = (V, Х) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер Х

= {(1, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 6), (4, 5)}.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

г) Постройте матрицу смежности.

*Решение*

а) Соединим попарно вершины,

инцидентные каждому из заданных ребер



x

3



2



3



4



1



5



6



7



x

1



x

2



x

4



x

5



x

6



x

7



x

9



x

8

б) Задан неориентированный псевдограф, имеющий две пары кратных ребер: {(1, 2)2, (1, 3)2}

Граф имеет изолированную вершину 7 и петлю в вершине 2.

в) deg(1) = 4, deg(2) = 5, deg(3) = 4, deg(4) = 3, deg(5) = 1, deg(6) = 1, deg(7) = 0

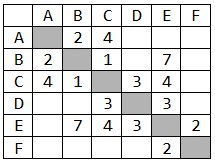
г) матрица инцидентности

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 | Х6 | Х7 | Х8 | Х9 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

г) матрица смежности

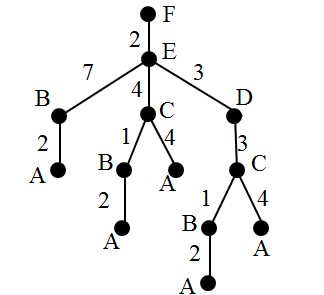
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 |  | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 |  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |  | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

*Пример 2.* Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из А в F.



*Решение*

Изобразим с помощью графа данные таблицы. Точками обозначим населенные пункты. Там, где пункты соединены дорогой, там соединяем точки.



Нарисуем пути из пункта А в F. Начнем с конца, с пункта F.

Получим кратчайший путь AB-ВС -СE-EF = 2 + 1 + 4 + 2 = 9

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

**Задание 1.** Граф G = (V, Х) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер. а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

г) Постройте матрицу смежности.

1. **вариант** Х = {(2, 3), (4, 3), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}
2. **вариант** Х = {(4, 5), (6, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

**Задание 2.** Даны два графа G1 = (V1, Х1) и G2 = (V2, Х2). Изобразите геометрически объединение графов *G*1 *G*2; пересечение графов *G*1 *G*2 и кольцевую сумму *G*1 *G*2.

**I вариант II вариант**



А



В



С



А



D



В



C



А



В



С



А



D



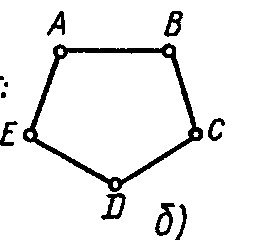
В

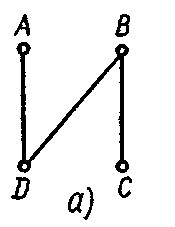


C

G1 G2 G1 G2

**Задание 3.** Изобразите дополнения графов:

 **I вариант II вариант**



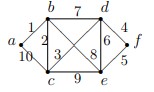
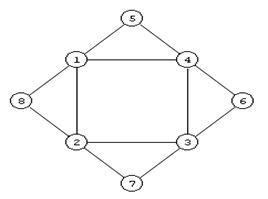
**Задание 4.** Решить задачу с помощью ориентированного графа:

1. **вариант.** Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?

1. **вариант.** Из Череповца в Вологду выехали пятеро велосипедистов: Белов, Чернов, Краснов, Смирнов и Захаров. Чернов едет впереди Смирнова. Захаров едет впереди Белова, но позади Смирнова. Краснов – впереди Чернова. Определите, в каком порядке едут велосипедисты.

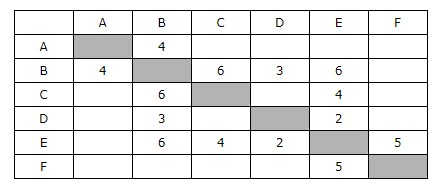
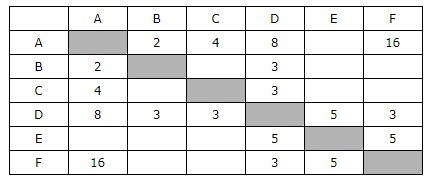
**Задание 5**. Определить является ли граф эйлеровым. Проверить теорему о четности вершин эйлерова графа. Если граф является эйлеровым, то записать эйлеров цикл.

**I вариант II вариант**



**Задание 6.** Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из А в F.

**I вариант II вариант**



## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют графом?
2. Охарактеризуйте виды графов.
3. Какими способами можно задать граф?

### Перечень учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

**Основная литература:**

1. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2023. – 468 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-16754-2. - Текст : непосредственный.
2. Баврин, И. И. Дискретная математика. Учебник и задачник : для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. - Москва : Юрайт, 2023. - 193 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-07917-3. Текст : непосредственный.
3. Баврин, И. И. Дискретная математика. Учебник и задачник : для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. - Москва : Юрайт, 2024. - 193 с. - (Профессиональное образование). - URL: https://urait.ru/bcode/536805 (дата обращения: 15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Юрайт, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-534-07917-3. - Текст : электронный.
4. Ганичева, А. В. Дискретная математика / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. - Санкт-Петербург: Лань, 2023. - 116 с. - URL: [https://e.lanbook.com/book/327338.](https://e.lanbook.com/book/327338) - Режим доступа: ЭБС Лань, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-507-46190-5. – Текст : электронный.
5. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. - 5-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 279 с. - (Профессиональное образование). - URL: https://urait.ru/bcode/542795 (дата обращения:

15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Юрайт, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-534-11632-

8. - Текст : электронный.

6. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. Б. Гисин. – 2-е изд, перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 468 с. - (Профессиональное образование). - URL: https://urait.ru/bcode/542794 (дата обращения: 15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Юрайт, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-534-16754-2. - Текст : электронный. 7. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. - 4-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. -

530 с. - (Профессиональное образование). - URL: https://urait.ru/bcode/542790 (дата обращения:

15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Юрайт, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-534-17715-

2. - Текст : электронный.

**Дополнительная литература:**

1. Вороненко, А. А. Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями : учебно-методическое пособие / А. А. Вороненко, В. С. Федорова. - 2-е изд., испр. - Москва : ИНФРА-М, 2024.

- 105 с. - (Среднее профессиональное образование). - URL: https://znanium.com/catalog/product/2102684 (дата обращения: 15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Znanium.com, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-16-015671-2. - Текст : электронный.

1. Гусева, А. И. Дискретная математика : учебник / А. И. Гусева, В. С. Киреев, А. Н. Тихомирова. - Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2022. - 208 с. - (Среднее профессиональное образование). - URL: https://znanium.com/catalog/product/1796823 (дата обращения: 15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Znanium.com, для зарегистрир
2. Гусева, А. И. Дискретная математика : сборник задач / А. И. Гусева, В. С. Киреев, А. Н. Тихомирова. - Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2021. - 224 с. - (Среднее профессиональное образование). - URL: https://znanium.com/catalog/product/1094740 (дата обращения: 15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Znanium.com, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-906818-72-0. - Текст : электронный. 4 Куликов, В. В. Дискретная математика : учебное пособие / В. В. Куликов. - Москва : РИОР :

ИНФРА-М, 2020. - 303 с. - (Среднее профессиональное образование). - URL:

https://znanium.com/catalog/product/1045945 (дата обращения: 15.02.2024). - Режим доступа: ЭБС Znanium.com, для зарегистрир. пользователей. - ISBN 978-5-369-01826-2. - Текст : электронный.

**Интернет-ресурсы:**

1. Конспект лекций по математической логике – [http://ivt-2011.ucoz.ru/files/osnovnoj\_uchebnik.pdf.](http://ivt-2011.ucoz.ru/files/osnovnoj_uchebnik.pdf)

1. Конспект лекций по дисциплине «Основы дискретной математики и теории алгоритмов» - <http://bsuirhelper.ru/sites/default/files/2013/06/11/konspekt/Lekcii_ODMiTA.pdf>

47